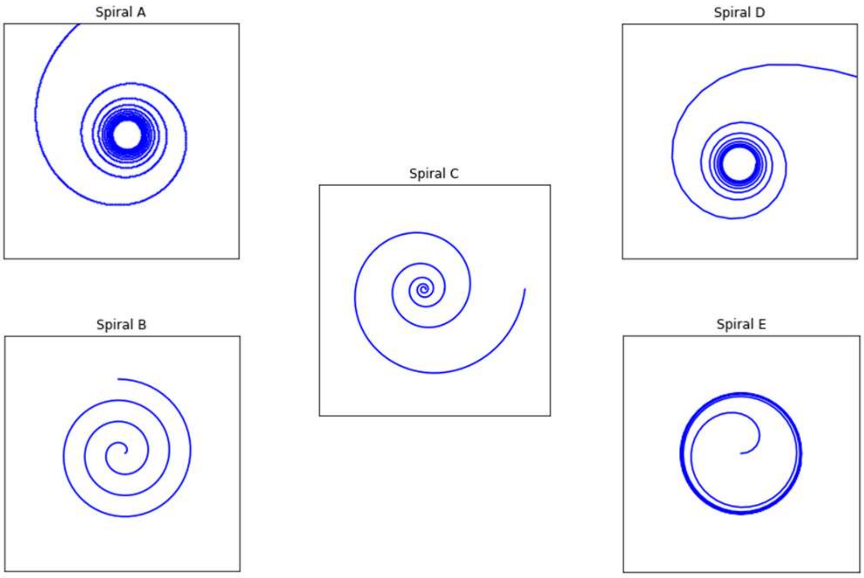
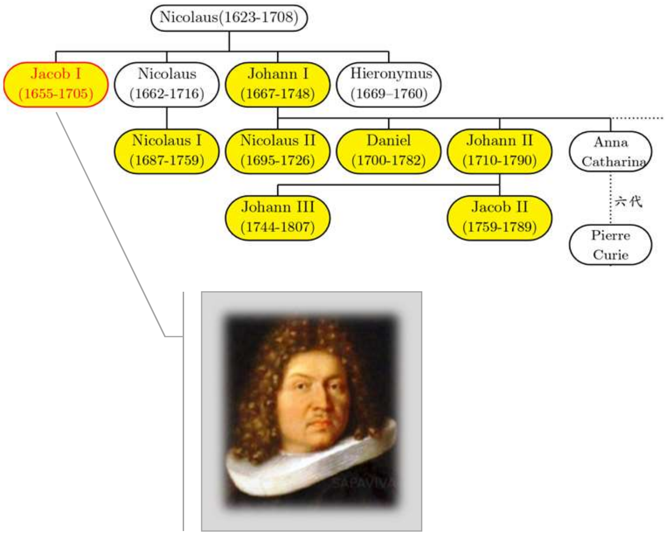
卯起來話 & 畫螺線

東海大學應用數學系
胡馨云

2024/5/30

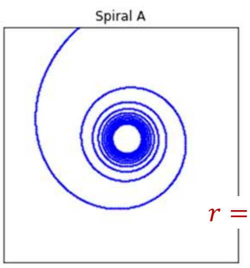
https://web3.nmns.edu.tw/Exhibits/112/on-the-oceanic-edge/index.html



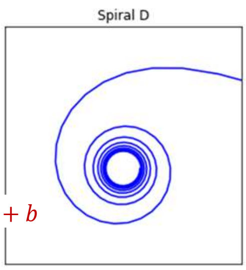


螺線的方程式 ：$r = f(\theta)$

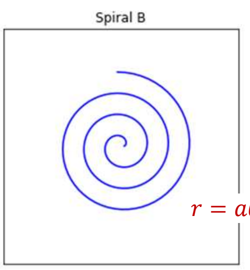
$0 \le \theta \le 2n\pi,\ n \in \mathbb{R}$



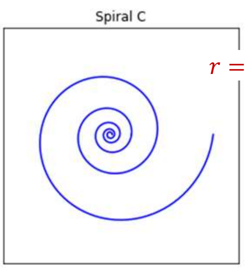
$r = ?$



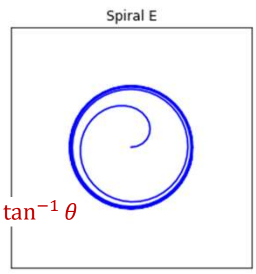
$r = a/\sqrt{\theta} + b$



$r = a\theta + b$



$r = e^{a\theta}$



$r = \tan^{-1}\theta$

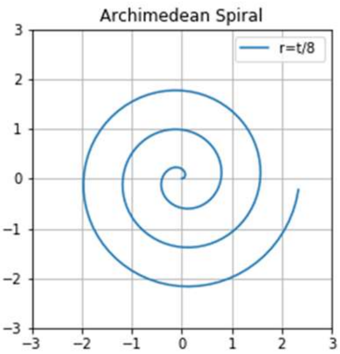
阿基米德螺線

線性螺線 (linear spiral)：

$r = a\theta + b$，其中 a, b 是常數

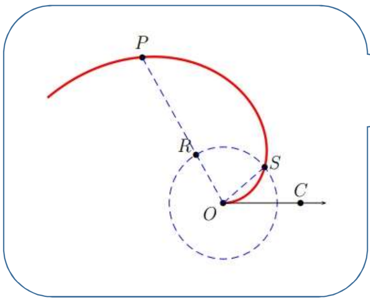
在古希臘時期數學家阿基米德的著作《螺線論》(On Spirals) 就有討論過

所以這個螺線又稱為「阿基米德螺線」(Archimedean spiral)

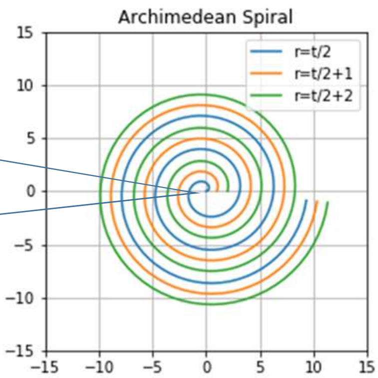


在直角座標系中可寫成

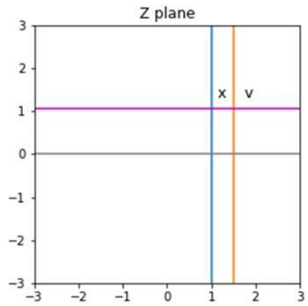
$$\begin{cases} x(\theta) = (a\theta + b)\cos\theta \\ y(\theta) = (a\theta + b)\sin\theta \end{cases}$$



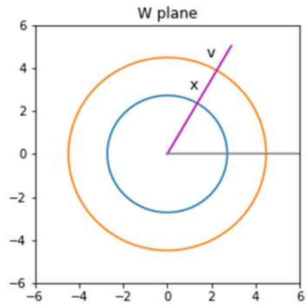
使用阿基米德螺線三等分任意角



線性螺線具有等角性質
這等角性的證明方法可透過複數空間的保形性質來處理



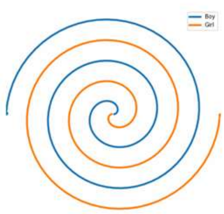
(A) 複數 z 平面



(B) 複數 $w = e^z$ 平面

阿基米德螺線 - 生活中的應用


渦捲式壓縮機運轉原理



黃金螺線

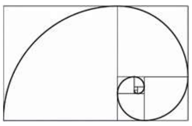
對數螺線 (logarithmic spiral)：

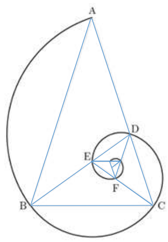
$r = e^{a\theta}$，其中 a是常數

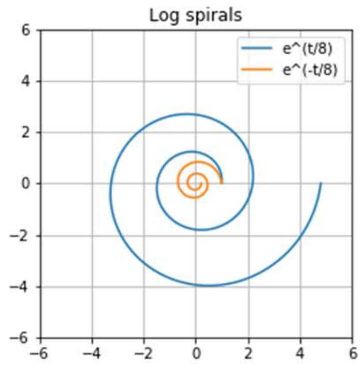
最早是笛卡兒提出，後來是雅各·伯努利投入大量心力重新研究，最早的形式為 $\ln r = a\theta$

此螺線又稱為

「黃金螺線」(golden spiral)





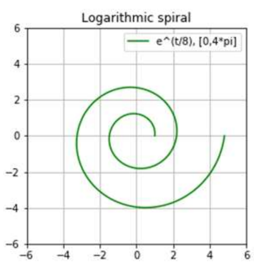


在直角座標系中可寫成

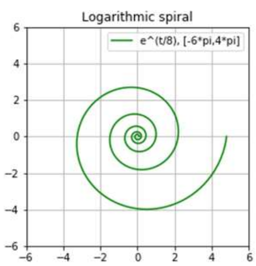
$$\begin{cases} x(\theta) = e^{a\theta}\cos\theta \\ y(\theta) = e^{a\theta}\sin\theta \end{cases}$$

黃金螺線也具有等角性質

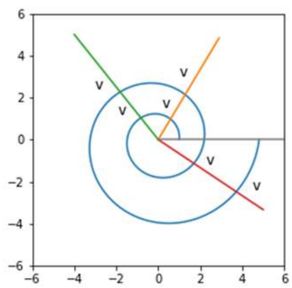
交角都相同，簡記為 $\alpha = \tan^{-1}(1/a)$

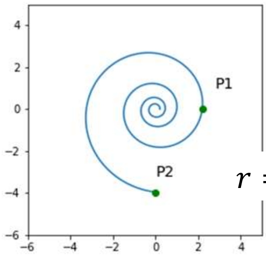


角度 $\theta \in [0,4\pi]$



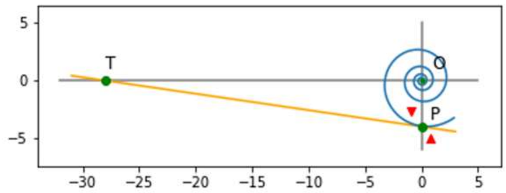
角度 $\theta \in [-6\pi, 4\pi]$





$r = e^{a\theta}$

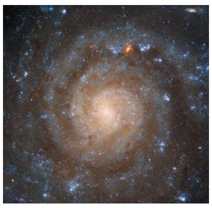
義大利物理暨數學家托里切利
發現無限多圈的螺線 $\widehat{PO}$ 之弧長
拉直後長度是等於直線 $\overline{PT}$ 長度

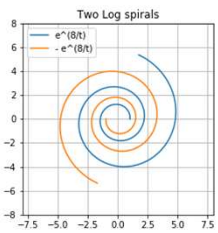


黃金螺線上選取兩點 P_1 及 P_2
極座標分別為 (r_1, θ_1) 及 (r_2, θ_2)
這兩點間的 弧長 $\widehat{P_1P_2}$ 長度可計算出

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r)^2 + (r')^2}\, d\theta = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}\right)$$

黃金螺線 - 自然界中的蹤跡



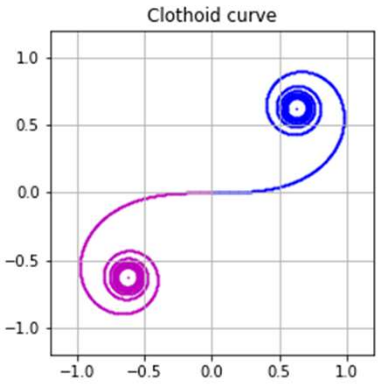


歐拉螺線

羊角螺線 (clothoid)：
此螺線一開始是 詹姆斯·伯努利 發現，最後是由歐拉對這曲線進行了完整分析和描述

$$\begin{cases} x(\theta) = \int_0^\theta \cos\left(\frac{kt^2}{2}\right) dt \\ y(\theta) = \int_0^\theta \sin\left(\frac{kt^2}{2}\right) dt \end{cases}$$

所以這個螺線又稱為
「歐拉螺線」(Euler spiral)



令參數式 $(x, y) = \big(Ci(\theta),\ Si(\theta)\big)$ 分別為菲涅耳積分 (Fresnel integrals)
具有 $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = 1$ 之性質

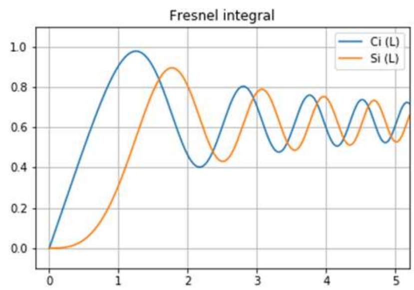
Ex: 若考慮常數 $k = 2$ 的情況，展開式如下

$$Ci(L) = \int_0^L \cos(t^2)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{L^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

$$Si(L) = \int_0^L \sin(t^2)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{L^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

當 $L \to \infty$ 用複變分析的路徑積分得到

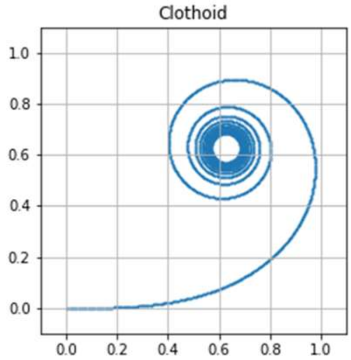
$$\int_0^\infty \cos t^2\, dt = \int_0^\infty \sin t^2\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \approx 0.6265$$



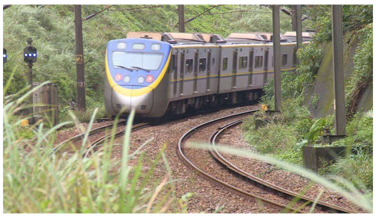
歐拉螺線的曲率 $\kappa(L)$ 和弧長 $s(L)$ 具線性的關係
就是成正比 $\kappa(L) = kL$，其中 k 是常數

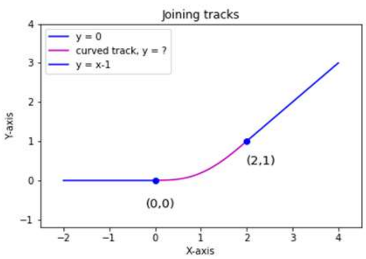
Ex: 當 $k = 2$ 相應的螺線曲率為 $\kappa(L) = 2L$
曲率半徑為 $\mathcal{R} = 1/\kappa(L) = 1/(2L)$

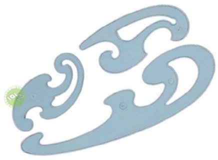
螺線每個位置點擁有不同的曲率及曲率半徑
曲率變化 $L = 0,\ \kappa = 0,\ \mathcal{R} \to \infty$
以至於 $L \to \infty,\ \kappa \to \infty,\ \mathcal{R} = 0$
它是可以與各種各樣的幾何形狀連結匹配
無論是直線或彎曲形的曲線都可

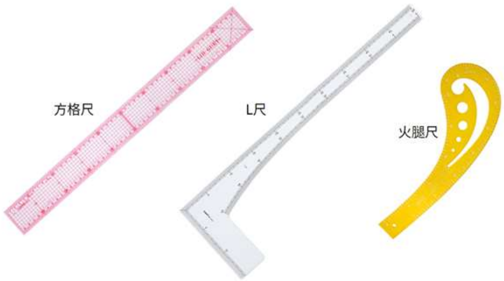


歐拉螺線 - 日常及工程上的應用

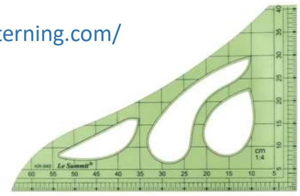


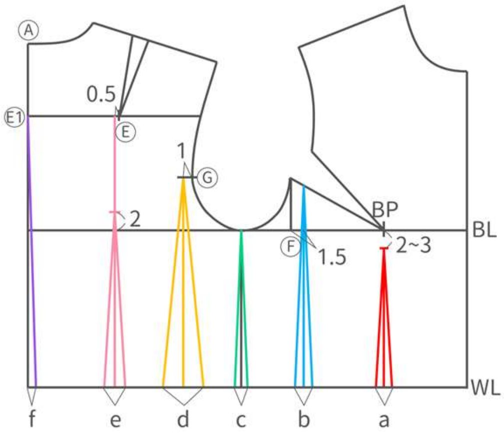




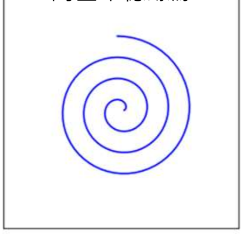


https://ipatterning.com/



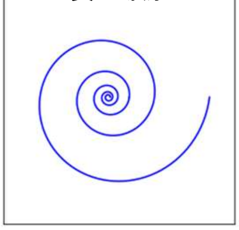


阿基米德螺線



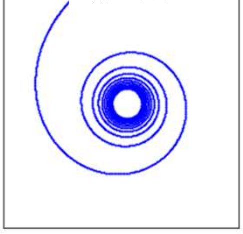
西元前287~西元年212年

黃金螺線



1638年

歐拉螺線



1694年(1744年)

都弄清楚了吧！

參考文獻

[1] Theodore A. Cook (1979), **The curves of life**, Dover, New York

[2] 陳仲安 (2022)。螺線的日常原理與應用。東海大學應用數學系110學年度專題研究報告

[3] Eli Maor (2014), e: The Story of a Number [**毛起來說e** 鄭惟厚, 譯]。天下文化

[4] Paolo Emilio Ricci (2018), Complex Spirals and Pseudo-Chebyshev Polynomials of Fractional Degree, ***Symmetry*** 10(12), 671; doi: 10.3390/sym10120671

[5] Robert A. Adams (2006), **Calculus – A Complete Course** (6th ed), Pearson Education Canada Inc.

[6] 陳仲安、胡馨云 (2023)。卯起來話和畫螺線。**《東海科學》24**, doi:10.29273/TS.202307_24.10002

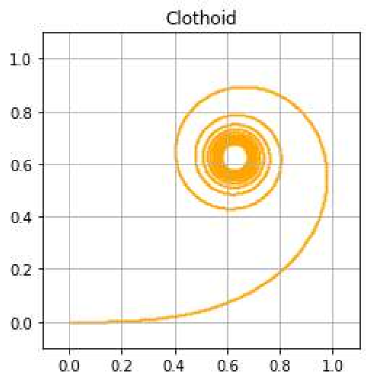
照片來源

- https://web3.nmns.edu.tw/Exhibits/112/on-the-oceanic-edge/index.html
- https://openhome.cc/zh-tw/openscad/curve/archimedean-spiral/
- https://technews.tw/2018/04/17/rebeat-innovations-has-invested-hd-vinyl/
- https://www.maximscakes.com.hk/tc/category/Dessert/PandanCoconutFlavoredEggRoll
- https://technews.tw/2022/09/28/ic-5332-galaxy-webb-telescope/
- https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%92%B0%E7%8B%80%E7%86%B1%E5%B8%B6%E6%B0%A3%E6%97%8B
- https://travelwithmiya.com/vatican-museums/

羊角螺線 程式碼

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def clothoid_ode(state,s,kappa0,kappa1):
    x,y,theta=state[0],state[1],state[2]
    return np.array([np.cos(theta),np.sin(theta),kappa0+kappa1*s])

def eval_clothoid(x0,y0,theta0,kappa0,kappa1,s):
    return odeint(clothoid_ode,np.array([x0,y0,theta0]),s,(kappa0,kappa1))

x0,y0,theta0=0,0,0
kappa0,kappa1=0,2
```

```
L=10
s=np.linspace(0,L,3000)
sol=eval_clothoid(x0,y0,theta0,kappa0,kappa1,s)
xs,ys,thetas=sol[:,0],sol[:,1],sol[:,2]

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1,1,1)
ax.set_aspect('equal')
plt.scatter(xs,ys,s=0.4,c='orange')
plt.xlim(-0.1,1.1)
plt.ylim(-0.1,1.1)
plt.title('Clothoid')
plt.grid()
fig.savefig('clothoid_test.png')
```



檔名: clothoid_test.png